

СМАДИЕВА АСЕЛЯ ГАНИЕВНА

«ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР
ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЕЙБІР ЕСЕПТЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ БЕЙЛОКАЛ
АНАЛОГТАРЫ»

АНДАТПА

**«8D05404-Іргелі және қолданбалы математика» білім беру бағдарламасы
бойынша PhD философия докторы дәрежесін ізденуге ұсынылған
диссертация**

Зерттеу тақырыбының өзектілігі. Бөлшек ретті есептеулер математикалық моделдеуде, механикада, физикада және т.б. салаларда кеңінен қолданылады. Соңғы жылдары, бөлшек ретті туындыларды қамтитын сызықты және квазисызықты диффузия теңдеулерін зерттеу көптеген ғалымдардың назарын аударуда, атап айтар болсақ Л. Каффарелли, М. Ямамото, Р. Захер, Ю. Лучко, С. Дипиеро, Э. Вальдиноччи, М. Киране, М. Ружанский, Б. Турметов және т.б. еңбектері. Сәйкесінше, аталған теңдеулер үшін қойылған бастапқы-шеттік есептерді зерттеуде олардың локалды және глобалды шешілімділігі туралы нәтижелер айтарлықтай өзекті болып табылады.

Эволюциялық теңдеулерге қойылған есептердің қисындылығынан басқа, шешімдердің асимптотикалық қасиеттері де ерекше қызығушылық тудырады. Тұрақты коэффициентті немесе шенелген айнымалы коэффициентті бөлшек ретті параболалық есептердің шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары Ю. Лучко, М. Ямамото, Ч. Ли, Р. Захер, Э. Вальдиноччи және тағы басқалардың жұмыстарында алынған.

Сондай-ақ, шенелген айнымалы коэффициентті субдиффузия теңдеуінің шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары да жеткілікті дәрежеде зерттелген. Бізге белгілі ақпараттарға сәйкес, сингулярлы коэффициенті бар бөлшек ретті диффузия теңдеулері үшін бастапқы-шеттік есептердің шешілімділігі Б. Турметов және Б. Кадиркуловтың, Х. Донг және Д. Кимнің, Р. Захердің және басқалардың кейбір жұмыстарында зерттелгенімен, шешімдерінің асимптотикалық бағалаулары зерттелмеген.

Уақытқа тәуелді коэффициенттері бар бөлшек ретті диффузиялық теңдеулер аномалды диффузия процестерін моделдейді.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты. Жұмыстың мақсаты – келесі түрдегі бөлшек ретті диффузия теңдеуін

$$\partial_t^\alpha u(x, t) - a(t)A(u(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$$

зерттеу, мұндағы $0 < \alpha \leq 1$, $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ облысы $\partial\Omega$ тегіс шекарасы бар шенелген аймақ немесе $\Omega \equiv \mathbb{R}^N$, және ∂_t^α – келесі бөлшек ретті операторлардың бірі болып табылады:

- Бөлшек ретті Капуто туындысы:

$$\partial_t^\alpha = {}^c D_{0+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \partial_s u(x,s) ds;$$

- Бөлшек ретті Риман – Лиувилль туындысы:

$$\partial_t^\alpha = D_{0+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(x,s) ds;$$

- Бөлшек ретті Капуто – Адамар туындысы:

$$\partial_t^\alpha = {}^c D_{a+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f'(s) \frac{ds}{s};$$

- Бөлшек ретті Адамар туындысы:

$$\partial_t^\alpha = {}_H D_{a+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t \frac{d}{dt} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{-\alpha} f(s) \frac{ds}{s}$$

және $A(u)$ төмендегі сызықты және квазисызықты операторлардың бірі:

- Лаплас операторы:

$$A(u) := \Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2};$$

- p - Лаплас операторы:

$$A(u) := \Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u);$$

- Кеуекті орта операторы:

$$A(u) := \nabla(g(u)\nabla u);$$

- Өзгешеленген оператор:

$$A(u) := f(u)\Delta u;$$

- Орташа қисықтық операторы:

$$A(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right);$$

- Кирхгоф операторы:

$$A(u) := M(\|\nabla u\|_{L^q})\Delta u.$$

Сонымен қатар, $a(t)$ функциясы келесі теңсіздікті

$$(H): a(t) \geq kt^\beta, \beta > -\alpha, k > 0$$

қанағаттандырсын деп болжаймыз.

Зерттеу объектісі.

- Уақыт бойынша Риман-Лиувилль, Капуто, Адамар, Капуто-Адамар бөлшек ретті туындылары қатысқан өзгешеленген диффузия теңдеулері үшін бастапқы-шеттік және бастапқы есептердің шешілімділігі зерттелінді.
- Уақыт бойынша Капуто туындысы қатысқан айнымалы коэффициентті сызықты және квазисызықты параболалық есептердің шешімдерінің уақыт бойынша асимптотикалық бағалаулары алынды.
- Адамар және Капуто-Адамар туындылары үшін Лейбниц ережесінің аналогтары алынып, олардың бөлшек ретті диффузия теңдеулеріне қойылған бастапқы-шеттік есептердің шешімдерінің априорлық бағалауларын алуда қолданысы келтірілді.

Ғылыми зерттеу әдісі. Диссертацияда қойылған есептерді зерттеу кезінде бөлшек ретті есептеулер теориясының әдістері, функционалдық талдау теориясы мен дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының әдістері қолданылды.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы. Бұл диссертациялық жұмыста зерттелген сызықты және квазисызықты бөлшек ретті туынды қатысқан мәселелер жаңа болып табылады, сонымен қатар классикалық сызықты есептерді, сондай-ақ маңызды қолданыстары бар квазисызықты есептер класын қамтиды. Қарастырылып отырған мәселелер негізінен осыған дейін зерттелінбеген немесе дербес жағдайлары үшін ғана зерттелінген. Сондықтан, ғылыми-зерттеу жұмысы белгілі нәтижелерді жалпылайды және толығымен жаңа нәтижелерді қамтиды.

Зерттеудің тәжірибелік және теориялық маңыздылығы.

Зерттеу тақырыбы негізінен теориялық және фундаменталды болып табылады. Дегенмен, диссертацияда қарастырылған есептер аномалды диффузия процестерін сипаттауда қолданысқа ие.

Басылымдар. Диссертация тақырыбы бойынша 13 жұмыс, соның ішінде 2 жарияланым Web of Science және Scopus деректер қорлары бойынша импакт-факторы бар шетелдік журналдарда, 3 жарияланым ҚР ҒжЖБ Ғылым және жоғары білім саласындағы бақылау комитетімен ұсынылған тізімге кіретін ғылыми басылымдарда және 7 жарияланым халықаралық ғылыми конференция материалында жарияланды.

Web of Science дерекқоры бойынша сәйкес үшінші, екінші және бірінші квартильдерге енгізілген және/немесе Scopus дерекқорында ғылыми журналдарда:

1. A. G. Smadiyeva, B. T. Torebek, Decay estimates for the time-fractional evolution equations with time-dependent coefficients//Physical and Engineering Sciences. — 2023. — 479:2276— 20230103, **Scopus (SJR 0.8, Quartile 1, Percentile 95).**

2. A. G. Smadiyeva, Degenerate time-fractional diffusion equation with initial and initial-boundary conditions//Georgian Mathematical Journal. — 2023. — Vol. 30. — Pp. 435–443, **Scopus (SJR 0.3, Quartile 3, Percentile 50).**

Қабылданған мақала

1. A. G. Smadiyeva, Degenerate Diffusion Equation with the Hadamard Time-Fractional Derivative//Women in Analysis and PDE: Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center. —2024, **(Scopus). <https://doi.org/10.1007/978-3-031-57005-6-38>. Accepted.**

ҚР ҒжЖБ Ғылым және Жоғары Білім саласында сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда:

1. M. Borikhanov, A. G. Smadiyeva, Cauchy problems for the time-fractional degenerate diffusion equations//Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. — 2023. — Vol. 117, no. 2. — Pp. 15–23.

2. A. G. Smadiyeva, Well-posedness of the initial-boundary value problems for the time-fractional degenerate diffusion equations//Bulletin of the Karaganda University, Mathematics Series. — 2022.— Vol. 107. — Pp. 145–151.

3. A. Smadiyeva, Initial-boundary value problem for the time-fractional degenerate diffusion equation//Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. — 2022. — Vol. 113, no. 1. — Pp. 32–41.

Халықаралық конференция материалдары

1. Смадиева А.Г., Некоторые задачи для вырожденного уравнения субдиффузии// VI Международная конференция, Нальчик, 5-9 декабря 2021г, С. 176.
2. Смадиева А. Г., On an integro-differential diffusion equation// IX Международная конференция, Актобе, 24-28 мая, 2022 г.
3. Smadiyeva Asselya, On an initial-boundary-value problems for the time-fractional diffusion equation// XII INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE GEORGIAN MATHEMATICAL UNION, Batumi, August 29 - September 3. 2022
4. A. G. Smadiyeva. The solvability of degenerate diffusion equation with the Hadamard time-fractional derivative //Международная Конференция «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения», Астана, Казахстан, 21-24 июня 2023.- р. 152.
5. Asselya Smadiyeva. Decay estimates for the degenerate time-fractional evolution equations//VII World Congress of Mathematicians of the Turkic World (TWMS Congress-2023), Turkestan, Kazakhstan, 20-23 September 2023.
6. Asselya Smadiyeva. A Cauchy-Dirichlet problem for the Hadamard time-fractional diffusion equation //PROGRAM OF THE SUMMER SCHOOL WORKSHOP “Modern Problems in PDEs and Applications” Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, Ghent, Belgium, 11 August 2023.
7. A. G. Smadiyeva, Decay estimates for Cauchy-Dirichlet problems // Annual International April Mathematical Conference, Almaty, April, 2024, p. 145.

Диссертациялық жұмыстың құрылымы мен көлемі. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 4 тараудан, қорытынды және қолданылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Жұмыстың көлемі - 107 бет. Әдебиеттер саны - 52.

Диссертацияның негізгі мазмұны. Бірінші тарауда қолданылған анықтамалар, леммалар мен қасиеттер және Риман-Лиувилль бөлшек ретті диффузия теңдеуіне қойылған Коши, Коши-Дирихле, Коши-Нейман есептері қарастырылды. Келтірілген есептердің шешімдерінің бар болуы, жинақтылығы мен жалғыздығы дәлелденді.

Екінші тарауда Капуто мағынасындағы бөлшек ретті туындысы бар сызықты және квазисызықты диффузия теңдеуіне қойылған есептердің шешімділігі мен шешімнің бағалаулары зерттелген.

Үшінші және төртінші тарауларда Адамар және Капуто-Адамар бөлшек ретті туындылары бар сызықты, квазисызықты диффузия теңдеулері қарастырылды. Сондай ақ Адамар және Капуто-Адамар бөлшек ретті туындылары үшін Лейбниц ережесінің аналогтары алынып, олардың қолданысы ретінде бөлшек ретті сызықты, квазисызықты диффузия теңдеулері үшін есептердің шешімінің априорлы бағалаулары алынды.